

Exercices – Séquence n° 1 – SUITES (I) :

limites, comparaison, opérations

Contenus	• Limite infinie ou finie d'une suite. • Déterminer la limite d'une suite par théorème de comparaison et par théorème des gendarmes. • Déterminer la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. • Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.
Capacité	• Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$. • Exemple d'algorithme : recherche de seuils.

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Limite infinie ou finie d'une suite

Exercice 1 [Ra]

Soit (u_n) une suite. Traduire les phrases suivantes à l'aide des limites de la suite (u_n) .

- 1) « Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$, où A est un réel, contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N » signifie que ...
- 2) « Tout intervalle ouvert contenant -5 contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N » signifie que ...
- 3) « Tout intervalle de la forme $] -\infty; B[$, où B est un réel, contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N » signifie que ...

Exercice 2 [Ra-Ca-Co]

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{5n + 2}$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n) .
2. Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre ?
3. Coder cet algorithme en langage Python sur ta calculatrice, puis l'exécuter pour $A = 20$, puis $A = 50$.
4. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la limite de la suite (u_n) ?
5. Démontrer cette conjecture à l'aide de la définition.

```

Saisir A
u ← √2
n ← 0
Tant que u ≤ A
  n ← n+1
  u ← √(5n+2)
Fin Tantque
Afficher n

```

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

Soit (w_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$ par : $w_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

- 1) Quel est le rôle de l'algorithme ci-contre donné en langage Python ?
- 2) Coder cet algorithme sur ta calculatrice et conjecturer la limite de la suite.
- 3) En utilisant la définition, démontrer que la suite (w_n) converge vers la limite conjecturée précédemment.

```
1 from math import *
2 L = []
3 for i in range (1,20):
4     L=L+[2+1/i**2]
5 print(L)
```

Exercice 4 [Mo-Co]

On considère la fonction Python ci-contre :

- 1) Qu'obtient-on si on saisit dans la console d'exécution Python :
a. `seuil(1)` ? b. `seuil(2)` ? c. `seuil(3)` ?
- 2) Que renvoie cette fonction ?
- 3) Est-on certain que le nombre d'itérations dans la boucle « while » sera fini quelle que soit la valeur de l'entier naturel p entré en argument ? Expliquer.

```
def
PYTHON
1 from math import *
2 def seuil(p):
3     n=1
4     while 1/n**3>=10**(-p):
5         n=n+1
6     return n
```

Exercice 5 [Ra-Co]

Soit (u_n) une suite convergente telle que, pour tout entier naturel n , on ait : $u_n > 0$.

- 1) Montrer que la limite de la suite (u_n) est positive ou nulle. (*Indication : On pourra raisonner par l'absurde.*)
- 2) Que penser de l'affirmation « la limite de la suite (u_n) est strictement positive » ? Justifier.

Limites et opérations**Exercice 6** [Ra]

- 1) Rappeler la forme indéterminée relative au produit de deux suites.
- 2) Dans chacun des cas suivants, donner un exemple de suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 0 ; \quad \text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 3 ; \quad \text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = +\infty.$$

Exercice 7 [Ra-Co]

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$1) p_n = (1 - 2n)(n^2 + 3) \quad 2) q_n = n^2 + 2n + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 3) r_n = 3n - 5 + \frac{3}{2n+9} \quad 4) s_n = \left(-1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}}\right)(2n + 4)$$

Exercice 8 [Ra-Co]

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$1) u_n = 3n^2 - 9n \quad 2) v_n = -2n^2 + \sqrt{n} \quad 3) w_n = \frac{1}{n}(n^2 + 10) \\ 4) x_n = \frac{2n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 1} \quad 5) y_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{4n^3 + 5} \quad 6) z_n = \sqrt{3n^2 - 2n + 1}$$

Exercice 9 [Ch-Ra-Co]

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = an^2 + bn + c$, où $a \neq 0$, b et c sont trois nombres réels.

Discuter la limite de (u_n) selon les valeurs de a , b et c .

Exercice 10 [Mo-Ra-Ca-Co]

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{3n^2-4}{n+2}$.

- 1) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation : $u_n \geq 1000$.
- 3) Pour vérifier sa réponse à la question 2, Joseph a codé la fonction en Python suivante. D'après son professeur, des erreurs se sont glissées dans son programme. Aide Joseph à se corriger.

```
1 from math import *
2 def seuil():
3     n=0
4     u=0
5     while u>=1000:
6         n=n+1
7         u=(3*n**2-4)/(n+2)
8     return(u)
```

Exercice 11 [Ch-Ra-Ca-Co]

- 1) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = n - \sqrt{n^2 + 1}$.
- 2) Déterminer la limite de la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}$.

Limites et comparaison**Exercice 12** [Ra-Ca-Co]

Soit (a_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par : $a_n = n^2 + 2n + (-1)^n n$. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n^2$ puis en déduire la limite de la suite (a_n) .

Exercice 13 [Ra-Ca-Co]

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = (n^2 - n)\sqrt{n}$.

- 1) Selon la calculatrice, la suite (u_n) semble-t-elle convergente ?
- 2) Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$, $u_n \geq \sqrt{n}$.
- 3) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = -n^2 - \frac{2n+1}{3n+2}$.

- 1) Selon la calculatrice, la suite (v_n) semble-t-elle convergente ?
- 2) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n , $v_n \leq -n^2$.
- 3) En déduire la limite de la suite (v_n) .

Exercice 15 [Ra-Ca-Co]

Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par : $b_n = \frac{(-1)^{n+n}}{(-1)^{n+2}}$.

Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq \frac{n-1}{3}$ puis en déduire la limite de la suite (b_n) .

Exercice 16 [Ra-Ca-Co]

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$1) \alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad 2) \beta_n = n^3 + \sin(n^5 + 1) \quad 3) \delta_n = \frac{1 - \cos^2(n)}{\sqrt{n}} \quad 4) \gamma_n = \frac{\cos(n) + 2 \sin(n)}{n^2}$$

Exercice 17 [Ra-Ch-Co]

VRAI ou FAUX ? Justifier.

- 1) **Affirmation 1** : « Si une suite est strictement croissante alors elle tend vers $+\infty$. »
- 2) **Affirmation 2** : « Si une suite a pour limite $+\infty$ alors elle est croissante. »
- 3) Soit (u_n) une suite telle qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \in]1,999; 2,001[$
Affirmation 3 : « La suite (u_n) converge vers 2. »
- 4) On considère une suite (v_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n non nul, $n^2 + 1 \leq n^2 v_n \leq n^2 + n$
Affirmation 4 : « La suite (v_n) converge. »

Exercice 18 [Ra-Ca-Co]

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, une suite (v_n) a pour limite 0 et ses termes sont tous positifs. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite.

- 1) Pour tout entier naturel n , $a_n = u_n + (-1)^n v_n$.
- 2) Pour tout entier naturel n , $b_n = 2 \sin(u_n) - \frac{1}{v_n}$.

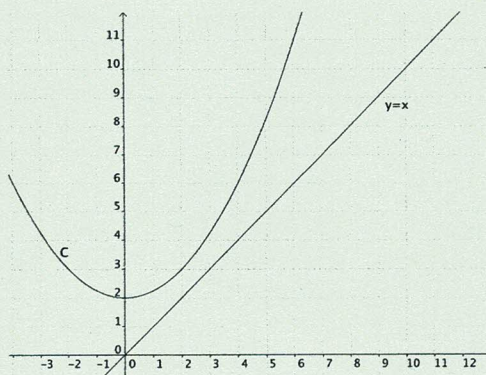
Résolution de problèmes

Exercice 19 [Re-Ra-Ca-Co]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ et C est sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n).$$



- 1) Sans calcul, représenter sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- 2) Montrer que pour tout réel x , $f(x) \geq x + 1$.
- 3) Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 4) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n - u_0 \geq n$. *Indication* : $u_n - u_0 = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_1 - u_0)$.
- 5) En déduire le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$.
- 6) À partir de quel rang N est-on certain que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n \geq 10^6$?

Exercice 20 [Ra-Ca-Co]

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n^2 + 3\cos(n)}{n^2 + 2}$.

- Donner une valeur approchée de u_{50} et u_{150} et déduire une conjecture de la limite éventuelle de la suite (u_n) .
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 2} \leq u_n \leq \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 2}$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $\frac{-7}{n^2 + 2} \leq u_n - 2 \leq \frac{-1}{n^2 + 2}$.
 - À partir de quel rang est-on certain que la distance entre u_n et 2 est inférieure à 10^{-4} ?

Exercice 21 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère la suite (S_n) définie pour tout nombre entier naturel $n \geq 1$ par :

$$S_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

- Compléter le programme écrit en langage Python ci-dessous qui renvoie le terme de rang n de la suite (S_n) .
- Exécuter ce programme pour donner une valeur approchée au millièmes de S_{100} , S_{1000} et S_{100000} .
- Conjecturer la limite de la suite (S_n) et démontrer cette conjecture.

```
1 from math import *
2 def s(n):
3     S=0
4     for i in range(1,n+1):
5         S+=1/(n+sqrt(i))
6     return S
```

Pour réviser

- Choisir la méthode la plus adaptée pour calculer une limite : 97 page 33.
- Vrai ou faux ? 98 et 99 page 133.
- Déterminer la limite de suites avec des racines carrés : 100 page 33.
- Déterminer un seuil : 52 et 53 pages 30-31.
- QCM page 40 de l'exercice 135 à 139 seulement.

Exercice 22 [Ra-Ca-Co]

L'écran d'un logiciel de calcul formel fournit les limites de trois suites ci-contre.

Justifier chacune des lignes de l'écran.

1	limite((-1)**n/n**3,n,inf)	
	0	M
2	limite((2-cos(n))/sqrt(n),n,inf)	
	0	M
3	limite((1+(sin(n))**2)/n,n,inf)	
	0	M

Pour aller plus loin**Exercice 23** [Mo-Ra-Co]

On considère la suite (S_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $S_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

Partie A : Conjecture

- Calculer S_1 et S_2 .
- De combien de termes, le terme général S_n de la suite (S_n) est-il la somme ?
- Quelle est la limite de chacun de ces termes quand n tend vers $+\infty$?
- Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite (S_n) ?

Partie B : Un algorithme

- 1) Compléter la fonction Python ci-contre afin qu'elle calcule et renvoie le terme de rang n de la suite (S_n) .
- 2) L'exécuter pour donner une valeur approchée au millième de : S_{100} , puis de S_{1000} .
- 3) Que peut-on penser de la conjecture faite précédemment ?

```

def S(n):
    s=0
    for i in range( ):
        s=
    return s

```

Partie C : Démonstration

- 1) Quel est le plus grand de ces termes ? le plus petit de ces termes ?
- 2) En déduire que : $\forall n \geq 1, \frac{n^2}{n^2+n} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$.
- 3) Déduire enfin la convergence de la suite (S_n) et préciser sa limite.

Exercice 24 [Mo-Ra-Co]

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par $w_n = n^5 - 3n^3$.

- 1) Montrer qu'à partir d'un certain rang N que l'on déterminera, $w_n \geq n^3$.
- 2) En déduire la limite de la suite (w_n) .
- 3) Écrire un algorithme en langage naturel ou un programme en langage Python qui demande un entier A et affiche le plus petit entier naturel n à partir duquel $w_n > A$.

Exercice 25 [Ra-Co]

On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $v_n = \frac{\sin 1}{n^2} + \frac{\sin 2}{n^2} + \frac{\sin 3}{n^2} + \dots + \frac{\sin n}{n^2}$

En encadrant v_n , montrer que la suite (v_n) converge.

Exercice 26 [Ch-Ra-Ca-Co] D'après BAC Amérique du Nord 2017

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit de ces n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$
- Pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$
- Pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

- 1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .
- 2) Pour tout entier naturel $n > 0$, on note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$
On a en particulier $S_1 = u_0$
 - a. Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 0$, $S_{n+1} = S_n + u_n$ et $S_n > 1$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 0$, $u_n = \frac{S_n}{S_n - 1}$.
 - c. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.
- 3) On considère la fonction Python ci-contre :
 - a. Compléter les lignes 5 et 6 afin qu'elle renvoie le terme de rang N de la suite (u_n) où N est un entier naturel entré en argument de cette fonction.
 - b. L'exécuter pour conjecturer le comportement à l'infini de la suite (u_n) .
- 4) Justifier que, pour tout entier naturel n , $S_n > n$ et en déduire limite de la suite (S_n) puis celle de la suite (u_n) .

```

def suite(U,N):
    S=U
    for i in range(N):
        S=
    return(S)

```